Homework 5 Foundations 4/24/06

Given a Peano system N, with the convention that $0' = 1$,we make the following definition:

- Given $x, y \in N$, define their **product** $x \cdot y$ by
  - $x \cdot 0 = 0$
  - $x \cdot (y') = (x \cdot y) + x$

Prove the following statements, given that N is a Peano system.

19. $\forall x, y \in N, x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$

20. $\forall x, y, z \in N, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \Rightarrow x \cdot (y + z') = x \cdot y + x \cdot z'.$

21. $\forall x, y, z \in N, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$

22. $\forall x, y \in N, x \cdot (y \cdot 0) = (x \cdot y) \cdot 0.$

23. $\forall x, y, z \in N, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \Rightarrow x \cdot (y \cdot z') = (x \cdot y) \cdot z'.$

24. $\forall x, y, z \in N, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

25. $0 \cdot 0 = 0.$

26. $\forall y \in N, 0 \cdot y = 0 \Rightarrow 0 \cdot y' = 0.$

27. $\forall y \in N, 0 \cdot y = 0.$

28. $\forall x \in N, x' \cdot 0 = 0.$

29. $\forall x, y \in N, x' \cdot y = x \cdot y + y \Rightarrow x' \cdot y' = x \cdot y' + y'.$

30. $\forall x, y \in N, x' \cdot y = x \cdot y + y.$

31. $\forall y \in N, 0 \cdot y = y \cdot 0.$

32. $\forall x, y \in N, x \cdot y = y \cdot x \Rightarrow x' \cdot y = y \cdot x'.$

33. $\forall x, y \in N, x \cdot y = y \cdot x.$

34. $\forall y \in N$, with $y \neq 1, 1 \neq 1 \cdot y.$

35. $\forall x, y \in N$, with $y \neq 1, x \neq x \cdot y \Rightarrow x' \neq x' \cdot y.$

36. $\forall x, y \in N$, with $y \neq 1, x \neq x \cdot y.$

37. $\forall y, z \in N, 1 \cdot y = 1 \cdot z \Rightarrow y = z.$

38. $\forall x, y, z \in N, (x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z) \Rightarrow (x' \cdot y = x' \cdot z \Rightarrow y = z).$

39. $\forall x, y, z \in N, x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z.$